

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

10

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
В НОВОМ ФОРМАТЕ



у

x

z

Новые образовательные стандарты

отлично



**МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ
ОТКРЫТОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР
НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**Ю. П. Дудницын
А. В. Семенов**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

10 класс

Контрольные работы в НОВОМ формате

Москва
«Интеллект-Центр»
2011

УДК 373.167.1:512

ББК 22.14я721

Д 81

Под общей редакцией заведующего методической лабораторией математики Московского института открытого образования, к.п.н. А.В. Семенова

Рецензент – учитель математики ГБОУ СОШ № 129 СЗООУ г. Москвы, к.п.н. П.И. Самсонов

Рекомендовано лабораторией математики МИОО для использования в образовательном процессе общеобразовательных учреждений.

Дудницын, Ю. П.

Д 81 Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Контрольные работы в НОВОМ формате: [учебное пособие] / Ю. П. Дудницын, А. В. Семенов; [под общ. ред. А. В. Семенова]; Московский центр непрерывного математического образования. – Москва: Интеллект-Центр, 2011. – 80 стр.

ISBN 978-5-89790-834-9

Сборник предназначен для проведения тематического контроля знаний учащихся по алгебре и началам математического анализа за курс 10 класса. Он будет также полезен при подготовке к итоговой аттестации.

Контрольные работы ориентированы на учебник по алгебре и началам анализа для 10-11 классов под редакцией Колмогорова А.Н. (авторы: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания).

Сборник поможет учителю повысить эффективность тематического контроля, учащемуся – подготовиться к итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена.

УДК 373.167.1:512

ББК 22.14я721

Генеральный директор издательства «Интеллект-Центр»
М.Б. Миндюк

Редактор Д.П. Локтионов
Художественный редактор Е.Ю. Воробьева

Подписано в печать 23.08.2011. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 5,0. Тираж 5000 экз. Заказ № 1108970.

Издательство «Интеллект-Центр»
117342, Москва, ул. Бутлерова, д. 17Б

arvato
япк

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат» 150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

ISBN 978-5-89790-834-9

© «Интеллект-Центр», 2011

© МЦНМО, 2011

Содержание

Введение	4
Планирование	6
Контрольные работы	10
Контрольная работа № 1	10
Контрольная работа № 2	14
Контрольная работа № 3	16
Контрольная работа № 4	20
Контрольная работа № 5	22
Контрольная работа № 6	26
Контрольная работа № 7	30
Итоговая контрольная работа.....	34
Приложения	40
Приложение № 1. Рекомендации по использованию материалов сборника для учебного процесса	40
Приложение № 2. Ответы и решения	41

ВВЕДЕНИЕ

Сборник предназначен для проведения контрольных работ по алгебре и началам анализа в 10 классе с целью проверки уровня усвоения учащимися 10 класса знаний и умений в объеме, установленном обязательным минимумом содержания образования. Он ориентирован на учебник по алгебре и началам анализа для 10–11 классов под редакцией Колмогорова А.Н. (авторы: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания).

Материалы сборника будут также полезны учителям и учащимся, занимающимся по другим учебникам. Их можно использовать при организации тематического и обобщающего контроля, организации итогового повторения, а также для подготовки учащихся к единому государственному экзамену.

Количество контрольных работ, предусмотренных традиционным планированием курса алгебры и начал математического анализа 10 класса (вариант тематического планирования приведен после введения), сохраняется, изменяется только структура самих работ. Каждая контрольная работа по алгебре и началам анализа, представленная в сборнике, состоит из двух частей.

Часть 1 содержит четыре задания базового уровня с кратким ответом (для них необходимо записать только ответ).

Часть 2 содержит три задания повышенного уровня – с развернутой формой ответа, к которым необходимо записать подробные решения в тетради для контрольных работ или на отдельном листе. Такая форма заданий присутствует в традиционных контрольных работах и хорошо знакома учащимся.

На выполнение каждой контрольной работы отводится 40–45 минут.

В конце сборника содержатся два приложения.

В приложении 1 представлены рекомендации по применению контрольных работ в учебном процессе и оценке результатов выполнения учащимися контрольной работы.

Проверка правильности выполнения работы учащегося производится учителем в соответствии с ответами к заданиям части 1 и критериями оценивания к заданиям части 2 (приложение 2). Выполнение задания из части 1 оценивается 1 баллом. За

задание части 2 учащийся может получить от 0 до 2-х баллов в зависимости от правильности и полноты ответа.

Данный формат контрольных работ поможет и учителю, и учащемуся адаптироваться к формату единого государственного экзамена.

Предлагаемые контрольные работы примерные, каждый учитель вправе внести в них свои изменения в соответствии с профилем обучения и уровнем подготовленности учащихся класса.

Текущие контрольные работы выполняют прежде всего диагностическую и контролирующие функции, но нельзя исключать обучающую составляющую. Задания первой части предполагают проверку только одного ответа (как на ЕГЭ), но с целью формирования навыков самоконтроля лучше, если учащийся запишет решение, а потом даст ответ. С этой целью имеет смысл ставить один балл за правильное решение и правильный ответ.

Контрольные работы составлены на проверку знаний традиционного курса алгебры и начал анализа старшей школы. При профильном обучении математике в старшей школе инвариантность курса алгебры и начал анализа поддерживается предложенным набором контрольных работ, но учитель вправе некоторые задания изменить. -

При оценивании выполнения заданий следует обращать внимание не только на правильность ответа, но и на правильность решения. В отличие от основной школы учащегося нужно ориентировать на получение правильного ответа «законными» способами, а не искать, за что бы похвалить. Разумная последовательность и даже жесткость предъявляемых требований в оценивании выполнения заданий с последующей корректировкой знаний позволит учащемуся получить знания школьного курса алгебры и начал анализа, сдать экзамен (в любой форме) и продолжать обучение в высшем учебном заведении.

ПЛАНИРОВАНИЕ

10 класс

Базовый уровень

Учебник: А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд. «Алгебра и начала анализа, 10–11» (Москва, Просвещение, 2007 г. и последующие издания)

№ уроков	Содержание учебного материала
§12*. Тригонометрические функции любого угла (6 ч)	
1, 2	Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса
3, 4	Свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса
5, 6	Радийанная мера угла
§13. Основные тригонометрические формулы (9 ч)	
7, 8	Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла
9–12	Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений
13, 14	Формулы приведения
15	Контрольная работа №1
§14. Формулы сложения и их следствия (7 ч)	
16–19	Формулы сложения. Формулы двойного угла

20–22*	Формулы суммы и разности тригонометрических функций <i>Изучение материала §§ 12, 13, 14 ведется по учебнику «Алгебра 9 класс» под редакцией С.А.Теляковского (Москва, «Просвещение», 2004 г. и последующие издания)</i>
§1. Тригонометрические функции числового аргумента (6 ч)	
23, 24	Синус, косинус, тангенс, котангенс (повторение)
25–27	Тригонометрические функции и их графики
28	Контрольная работа №2
§2. Основные свойства функций (12 ч)	
29–31	Функции и их графики
32–34	Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций
35, 36	Возрастание и убывание функций. Экстремумы
37–39	Исследование функций. Свойства тригонометрических функций. Гармонические колебания
40	Контрольная работа №3
§3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств (13 ч)	
41–43	Арксинус, арккосинус и арктангенс
44–46	Решение простейших тригонометрических уравнений

47	Решение простейших тригонометрических неравенств
48–52	Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений
53	Контрольная работа №4
§4. Производная (14 ч)	
54, 55	Приращение функции
56	Понятие о производной
57, 58	Понятие о непрерывности и предельном переходе
59–63	Правила вычисления производных
64–66	Производная сложной функции. Производные тригонометрических функций
67	Контрольная работа №5
§5. Применение непрерывности и производной (9 ч)	
68–70	Применение непрерывности
71–73	Касательная к графику функции
74	Приближенные вычисления
75	Производная в физике и технике
76	Контрольная работа №6
§6. Применение производной к исследованию функций (16 ч)	
77–80	Признак возрастания (убывания) функции
81–83	Критические точки функции, максимумы и минимумы

84–87	Примеры применения производной к исследованию функций
88–91	Наибольшее и наименьшее значения функции
92	Контрольная работа №7
93–101	Заклочительное повторение курса алгебры и начал анализа. Итоговая контрольная работа (2 часа)

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Часть 1

1

Вычислите произведение значений выражений A и B , если $A = \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \sin 90^\circ + 2 \cos 60^\circ$, $B = 4 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$.

2

Гипотенуза MP треугольника MPK равна 8. $\angle K = 90^\circ$, $\cos M = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите длину катета PK .

3

Упростите выражение $1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

4

Найдите значение выражения $\frac{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{5}$.

Часть 2

5

Докажите тождество

$$\frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right).$$

6

Найдите наибольшее значение выражения
 $5 - \cos(\pi + \alpha)$.

7

Существует ли значение α , при котором $\sin \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ и
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3}}$? Ответ поясните.

Контрольная работа № 1

Вариант 2

Часть 1

1

Вычислите сумму значений выражений A и B , если

$$A = \cos 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 90^\circ + 2 \sin 30^\circ, \quad B = 3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \sin \pi \cdot \cos \frac{\pi}{6}.$$

2

Гипотенуза AB треугольника ABC равна 12. $\angle C = 90^\circ$,

$$\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}. \text{ Найдите длину катета } BC.$$

3

Упростите выражение $1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

4

Найдите значение выражения $\frac{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{\sin^2 \alpha}$, если

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}.$$

Часть 2

5

Докажите тождество $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1} + \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = 0$.

6

Найдите наибольшее значение выражения

$$3 - \sin(\pi + \alpha).$$

7

Существует ли значение α , при котором $\cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{6}}{\sqrt{10}}$ и $\sin \alpha = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{5}}$? Ответ поясните.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Часть 1

1

Вычислите значение выражения $4\sin\frac{7\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

2

Упростите выражение $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha$.

3

Найдите значение $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

4

Вычислите значение выражения $\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta$,
если $\cos\alpha = -\frac{2}{5}$, $\cos\beta = \frac{15}{16}$.

Часть 2

5

Докажите тождество $1 - 2\sin^2\alpha = \frac{2\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}$.

6

Сравните с нулём значение выражения

$$A = \sin 25^\circ + \sin 35^\circ - \cos 5^\circ.$$

7

Дана функция $y = -2\sin x$. Найдите её область определения, множество значений и все значения x , при которых $y = 0$.

Контрольная работа № 2

Вариант 2

Часть 1

1

Вычислите значение выражения $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} + 2\cos \frac{5\pi}{3}$.

2

Упростите выражение $4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha$.

3

Найдите значение $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4

Вычислите значение выражения $\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta \cdot \cos\alpha$,
если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{7}{15}$.

Часть 2

5

Докажите тождество $\frac{2\sin^2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

6

Сравните с нулём значение выражения

$$A = \cos 75^\circ + \cos 45^\circ - \cos 15^\circ.$$

7

Дана функция $y = 1 - \cos x$. Найдите её область определения, множество значений и все значения x , при которых $y = 0$.

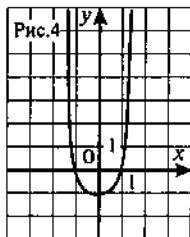
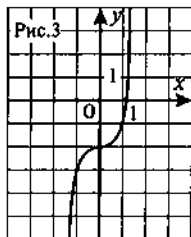
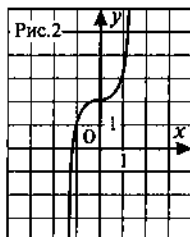
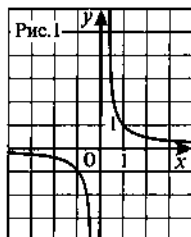
Контрольная работа № 3

Вариант 1

Часть 1

1

На каких рисунках схематически изображены графики функций $y = x^4 - 1$, $y = x^{-5}$.



2

Функция $y = f(x)$ является чётной. Вычислите $f(-3) + 2f(1)$, если $f(3) = 4$, $f(-1) = 2$.

3

Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

4

Постройте эскиз графика функции $y = \frac{1}{x+2}$ и найдите координаты точек его пересечения с осями координат. В ответе запишите найденные координаты.

Часть 2

5

Докажите, что функция $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$ является нечётной.

6

Функция $y = \cos 2x$ принимает равные значения при $x = \frac{\pi}{6}$, $x = a$, $x = b$ $\left(a < \frac{\pi}{6} < b\right)$. Найдите числа a и b , если они принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

7

Расположите в порядке возрастания числа:

$$\cos 0,3, \cos 1,2, \cos \pi, \cos 2,7.$$

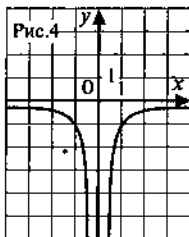
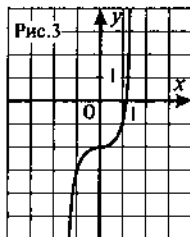
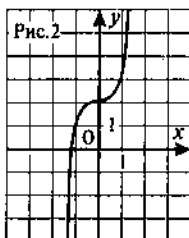
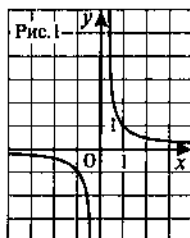
Контрольная работа № 3

Вариант 2

Часть 1

1

На каких рисунках схематически изображены графики функций $y = x^5 + 2$, $y = -x^{-4}$.



2

Функция $y = f(x)$ является нечётной. Вычислите $2f(-4) + f(3)$, если $f(4) = 1$, $f(-3) = 2$.

3

Найдите наименьший положительный период функции $f(x) = \cos 4x$.

4

Постройте эскиз графика функции $y = (x-1)^4$ и найдите координаты точек его пересечения с осями координат. В ответе запишите найденные координаты.

Часть 2

5

Докажите, что функция $f(x) = x^2 + \cos x$ является чётной.

6

Функция $y = \cos \frac{x}{2}$ принимает равные значения при $x = \frac{\pi}{2}$, $x = a$, $x = b$ $\left(a < \frac{\pi}{2} < b\right)$. Найдите числа a и b , если они принадлежат промежутку $[-\pi; 4\pi]$.

7

Расположите в порядке возрастания числа:

$$\sin 0,8, \sin(-0,9), \sin \frac{3\pi}{2}, \sin 1,2.$$

Контрольная работа № 4

Вариант 1

Часть 1

1

Вычислите значение выражения

$$2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos 1 + \operatorname{arctg}\sqrt{3}.$$

2

Найдите наименьший целый положительный корень

уравнения $\sin \frac{\pi x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3

Решите уравнение $\cos 5x + \cos x = 0$.

4

Найдите все значения x , при которых значения выражений $1 + 2\cos^2 x$ и $(-\sin x)$ равны.

Часть 2

5

Решите неравенство $2\cos x - \sqrt{2} \geq 0$.

6

Решите уравнение $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x$.

7

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y + 1 = 2\cos x, \\ y^2 = 1 + 4\cos x. \end{cases}$$

Контрольная работа № 4

Вариант 2

Часть 1

1

Вычислите значение выражения

$$\arcsin 1 - 3\arccos \frac{1}{2} + \operatorname{arctg}(-1).$$

2

Найдите наибольший целый отрицательный корень

уравнения $\cos \frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

3

Решите уравнение $\sin 3x + \sin x = 0.$

4

Найдите все значения x , при которых значения выражений $2\sin^2 x$ и $1 - \cos x$ равны.

Часть 2

5

Решите неравенство $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0.$

6

Решите уравнение $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x.$

7

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 3\operatorname{tg} x + 8\cos y = 7. \end{cases}$$

Контрольная работа № 5

Вариант 1

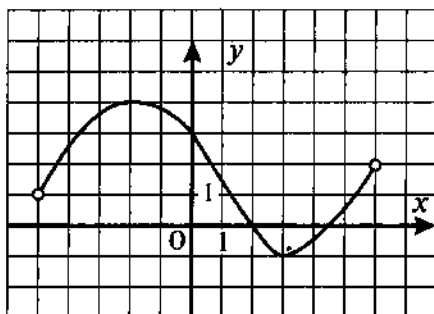
Часть 1

1

Вычислите $f'(3)$, если $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + 2$.

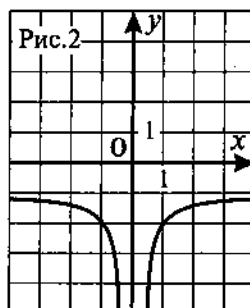
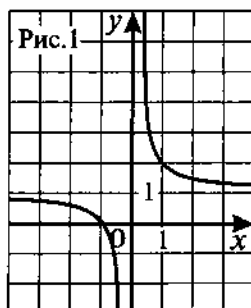
2

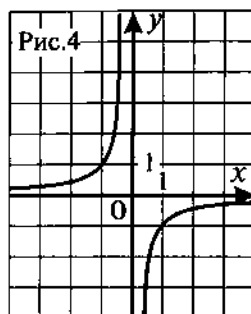
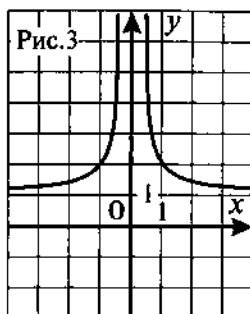
На рисунке изображён эскиз графика функции $y = f(x)$. Найдите все целые значения её аргумента, при которых $f'(x) > 0$.



3

На каком рисунке изображён эскиз графика $y = f'(x)$ — производной функции $f(x) = x - \frac{1}{x}$?





4

Найдите производную функции $y = x \cos x$.

Часть 2

5

Постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \leq 1, \\ 5 - x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной в каждой точке области определения?

К какому числу стремится значение функции f при $x \rightarrow -2$? (Ответ поясните.)

6

Докажите, что $f'(2) = g'(2)$, если $f(x) = (2x - 5)^4$,
 $g(x) = 3 - 8x$.

7

Найдите все значения x , при которых $f'(x) = 0$, если
 $f(x) = 2\sqrt{2} \cdot x - \sin 4x$.

Контрольная работа № 5

Вариант 2

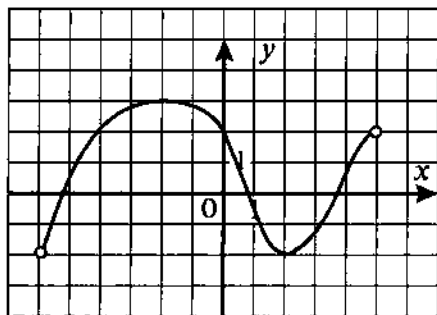
Часть 1

1

Вычислите $f'(2)$, если $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 3$.

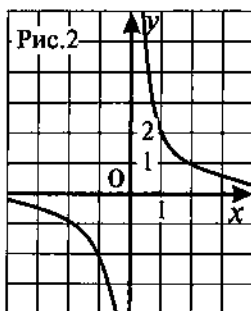
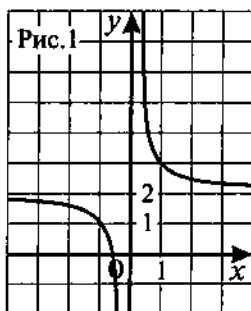
2

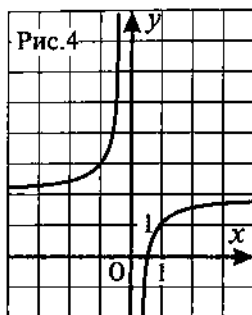
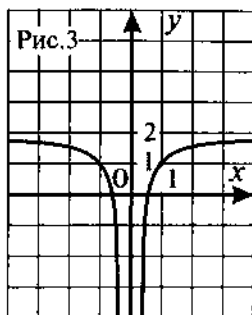
На рисунке изображён эскиз графика функции $y = f(x)$. Найдите все целые значения её аргумента, при которых $f'(x) < 0$.



3

На каком рисунке изображён эскиз графика $y = f'(x)$ – производной функции $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$?





4

Найдите производную функции $y = \frac{\sin x}{x}$.

Часть 2

5

Постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{при } x \leq -1, \\ 2-x^2 & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной в каждой точке области определения?

К какому числу стремится значение функции f при $x \rightarrow 1$? (Ответ поясните.)

6

Докажите, что $g'(3) = h'(3)$, если $g(x) = (2x-7)^5$,
 $h(x) = 10x-7$.

7

Найдите все значения x , при которых $f'(x) = 0$, если
 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \cdot x$.

Контрольная работа № 6

Вариант 1

Часть 1

1

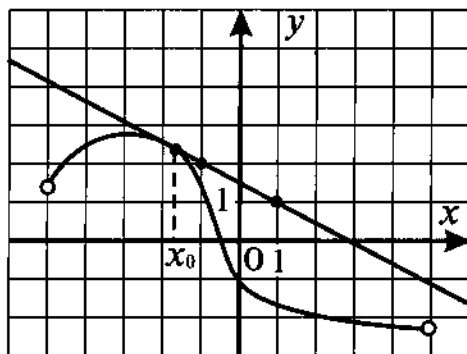
Сколько целых отрицательных решений имеет неравенство $x \geq \frac{5x}{2+x}$?

2

К графику функции $f(x) = x^5 - 6x^3$ проведена касательная через точку с абсциссой $x_0 = 1$. Вычислите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

3

На рисунке изображены эскиз графика функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



4

Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t) = t^4 - 2t^2$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 3$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах.)

Часть 2

5

Докажите, что касательные, проведённые через точки графика функции $f(x) = 1 - \cos \frac{x}{2}$ с абсциссами $x_1 = -\pi$ и $x_2 = 3\pi$, параллельны.

6

Касательные, проведённые через точки P и M графика функции $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$, параллельны биссектрисам первого и третьего координатных углов. Найдите координаты точек P и M .

7

Найдите величину угла, образованного касательными к графику функции $y = \sin x$, которые проходят через его точки с абсциссами $x_1 = \pi$ и $x_2 = 2\pi$.

Контрольная работа № 6

Вариант 2

Часть 1

1

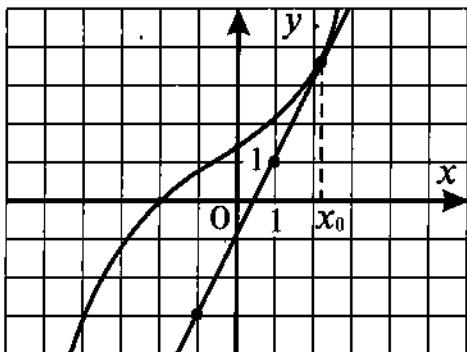
Сколько целых положительных решений имеет неравенство $\frac{1}{x} \leq \frac{2}{3-x}$?

2

К графику функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^4$ проведена касательная через точку с абсциссой $x_0 = -2$. Вычислите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

3

На рисунке изображены эскиз графика функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



4

Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t) = t^5 + t^3$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 2$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах.)

Часть 2

5

Докажите, что касательные, проведённые через точки графика функции $f(x) = 2 + \sin 2x$ с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi$, параллельны.

6

Касательные, проведённые через точки A и B графика функции $f(x) = \frac{3+x}{x+2}$, параллельны биссектрисам второго и четвёртого координатных углов. Найдите координаты точек A и B .

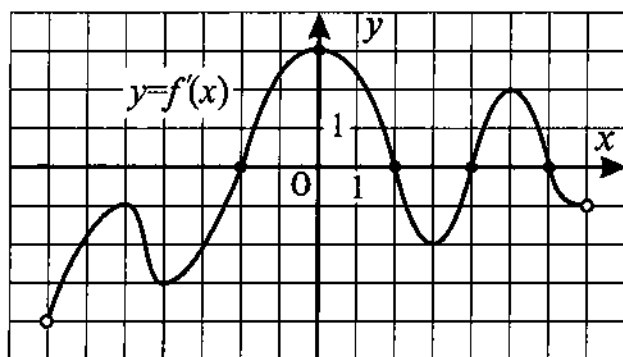
7

Найдите величину угла, образованного касательными к графику функции $y = -\cos x$, которые проходят через его точки с абсциссами $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 1

Часть 1

- 1 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-7; 7)$. На рисунке изображён эскиз графика её производной $y = f'(x)$. Найдите точки минимума функции f .



- 2 Найдите промежутки возрастания функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

- 3 Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 6\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 4 Прямолинейное движение точки описывается законом $S(t) = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 20t$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах.) Найдите наименьшую скорость её движения.

Часть 2

5

Докажите, что уравнение $x^5 + 3x^3 - 4 = 0$ имеет единственное решение. Найдите его.

6

Число 45 нужно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, причём два слагаемых были пропорциональны числам 2 и 3. Задайте формулой функцию, наибольшее значение которой необходимо будет найти.

7

Найдите искомые слагаемые (см. задание 6) и представьте число 45 в виде их суммы.

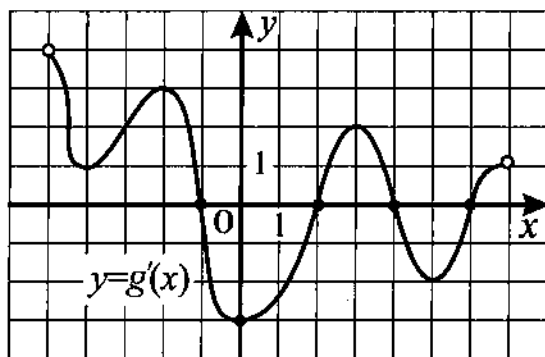
Контрольная работа № 7

Вариант 2

Часть 1

1

Функция $y = g(x)$ определена на промежутке $(-5; 7)$. На рисунке изображён эскиз графика её производной $y = g'(x)$. Найдите точки максимума функции g .



2

Найдите промежутки убывания функции

$$f(x) = 8x^2 - x^4.$$

3

Найдите наименьшее значение функции $y = 8\cos x + 4x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

4

Прямолинейное движение точки описывается законом $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 48t$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах.) Найдите наибольшую скорость её движения.

Часть 2

5

Докажите, что уравнение $3 - x^3 - 2x = 0$ имеет единственное решение. Найдите его.

6

Число 27 нужно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, причём два слагаемых были пропорциональны числам 1 и 5. Задайте формулой функцию, наибольшее значение которой необходимо будет найти.

7

Найдите искомые слагаемые (см. задание 6) и представьте число 27 в виде их суммы.

Итоговая контрольная работа

(2 урока)

Вариант 1

Часть 1

1

Строительной фирме нужно приобрести 79 кубометров пеноблоков. У неё есть три поставщика. Сколько придется заплатить за самую дешёвую покупку с доставкой? Цены и условия доставки приведены в таблице.

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 м ³)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	2750	4800	
Б	3200	4500	При заказе на сумму более 150000 руб. доставка бесплатно
В	2800	4700	При заказе на сумму более 200000 руб. доставка бесплатно

2

Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x+3}{x^2-2x}}$.

В ответе запишите наименьшее целое отрицательное число, принадлежащее ей.

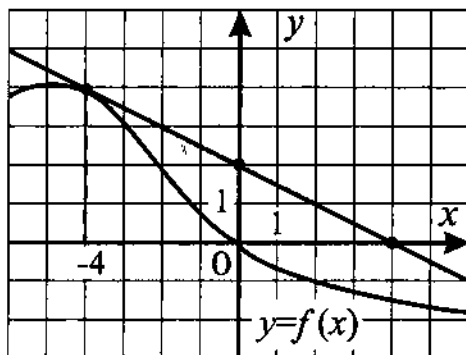
3

Вычислите значение выражения $14\text{tg}^2\alpha$, если

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{17}}.$$

4

На рисунке изображены эскиз графика функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = -4$. Вычислите значение производной этой функции в точке $x_0 = -4$.



5

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t$. Если при движении были остановки, то найдите соответствующие значения t .

6

Найдите значения выражения

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 3\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 5\alpha\right) + \cos 2\alpha \cdot \sin 3\alpha,$$

если $\alpha = \frac{\pi}{30}$.

7

Функция задана формулой $y = \frac{8x}{x^2 + 4}$. Найдите её наибольшее значение на промежутке $[0; 3]$.

Часть 2

8

Постройте эскиз графика функции $f(x) = x^4 - 8x^2$. Используя его, определите число корней уравнения $f(x) = -2$.

9

Решите уравнение $\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) \sqrt{9 - x^2} = 0$.

10

При каком значении параметра a прямая $y = 3x + a$ является касательной к графику функции $y = 4x^2 - 5x + 9$?

11

Представьте число 16 в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых будет наименьшая.

Итоговая контрольная работа

(2 урока)

Вариант 2

Часть 1

1

Для изготовления книжных полок требуется заказать 20 одинаковых стекол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла равна $0,15 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и резку стёкол. Сколько рублей нужно заплатить за самый выгодный заказ?

Фирма	Стоимость стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)
А	100	10
Б	90	15
В	140	Бесплатно

2

Найдите область определения функции $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{2 - x}}$. В ответе запишите наибольшее целое положительное число, принадлежащее ей.

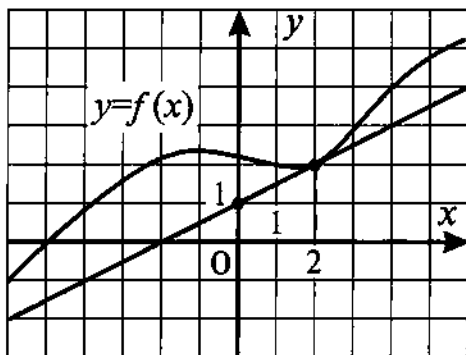
3

Вычислите значение выражения $9\cos^2 \alpha$, если

$$\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{4}{11}}.$$

4

На рисунке изображены эскиз графика функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Вычислите значение производной этой функции в точке $x_0 = 2$.



5

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 21t$. Если при движении были остановки, то найдите соответствующие значения t .

6

Найдите значения выражения

$$\cos 4\alpha \cdot \cos 5\alpha - \cos(\pi + 9\alpha) - \sin 5\alpha \cdot \sin 4\alpha,$$

если $\alpha = \frac{\pi}{27}$.

7

Функция задана формулой $y = \frac{6x}{x^2 + 9}$. Найдите её наименьшее значение на промежутке $[1; 6]$.

8

Постройте эскиз графика функции $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$. Используя его, определите число корней уравнения $f(x) = -1$.

9

Решите уравнение $\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\sqrt{4 - x^2} = 0$.

10

При каком значении параметра a прямая $y = 5x + a$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 - 3x + 7$?

11

Площадь прямоугольника равно 36. Какие длины должны иметь его стороны, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

Рекомендации по использованию материалов сборника для учебного процесса

В начале сборника приведено тематическое планирование по алгебре и началам математического анализа для 10–11 класса по учебнику «Алгебра и начала математического анализа, 10–11» А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбурд / под ред. А.Н. Колмогорова – М.: Просвещение, 2007 и последующие издания. В таблице показано, что изучение каждой темы завершается проведением соответствующей контрольной работы, представленной в данном сборнике. Учитель может заменить некоторые задания другими из соответствующей темы или уменьшить (увеличить) объём контрольной работы в зависимости от уровня подготовленности учащихся своего класса.

Для оценки предложенных работ можно использовать следующую шкалу. За каждое верно выполненное задание части 1 выставляется 1 балл. Количество баллов за каждое верно выполненное задание части 2 – 2 балла (в зависимости от полноты и правильности ответа).

Успешность выполнения каждой тематической контрольной работы определяется в соответствии со шкалой:

удовлетворительно	– 4–5 баллов;
хорошо	– 6–8 баллов;
отлично	– 9–10 баллов;

для итоговой контрольной работы в соответствии со шкалой:

удовлетворительно	– 6–8 баллов;
хорошо	– 9–12 баллов;
отлично	– 13–15 баллов.

Таким образом, оценку «4» учащийся может получить, только выполнив хотя бы одно из заданий части 2.

Учитель может скорректировать предлагаемую шкалу оценок с учётом особенностей класса.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	4	6 ^н	$\cos^2 \alpha$	25

Часть 2

5

Докажите тождество

$$\frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right).$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \cos \alpha = \\ &= \sin \alpha + \cos \alpha - \cos \alpha = \sin \alpha, \end{aligned}$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \alpha.$$

Равенство верно при всех допустимых значениях α .

6

Найдите наибольшее значение выражения

$$5 - \cos(\pi + \alpha).$$

Решение.

$$5 - \cos(\pi + \alpha) = 5 + \cos \alpha; \quad 5 - 1 \leq 5 + \cos \alpha \leq 5 + 1;$$

$$4 \leq 5 + \cos \alpha \leq 6.$$

Наибольшее значение 6 достигается, например, при $\alpha = 0$.

Ответ: 6.

7

Существует ли значение α , при котором $\sin \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ и

$\cos \alpha = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3}}$? Ответ поясните.

Решение.

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{3}} \right)^2 = \\ &= \frac{6-2\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{6-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{6} = 1.\end{aligned}$$

Ответ: существует.

Контрольная работа № 1

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	4	8	$\sin^2 \alpha$	4

Часть 2

5

Докажите тождество $\frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - 1} + \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = 0$.

Решение.

$$\frac{-2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{-2\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Равенство верно при всех допустимых значениях α .

6

Найдите наибольшее значение выражения $3 - \sin(\pi + \alpha)$.

Решение.

$$3 - \sin(\pi + \alpha) = 3 + \sin \alpha; \quad 3 - 1 \leq 3 + \sin \alpha \leq 3 + 1;$$

$$2 \leq 3 + \sin \alpha \leq 4.$$

Наибольшее значение 4 достигается, например, при

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: 4.

7

Существует ли значение α , при котором $\cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{6}}{\sqrt{10}}$

и $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$? Ответ поясните.

Решение.

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= \left(\frac{1-\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \\ &= \frac{7-2\sqrt{6}}{10} + \frac{\sqrt{6}}{5} = \frac{7}{10} \neq 1.\end{aligned}$$

Ответ: не существует.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	-1	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{8}$

Часть 2

5

Докажите тождество $1 - 2\sin^2\alpha = \frac{2\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}$.

Решение.

$$1 - 2\sin^2\alpha = \cos 2\alpha,$$

$$\frac{2\cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{2\cos\alpha \cdot \sin\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} = \cos 2\alpha$$

Равенство верно при всех допустимых значениях α .

6

Сравните с нулём значение выражения

$$A = \sin 25^\circ + \sin 35^\circ - \cos 5^\circ.$$

Решение.

$$\sin 25^\circ + \sin 35^\circ - \cos 5^\circ =$$

$$= 2\sin \frac{25^\circ + 35^\circ}{2} \cdot \cos \frac{25^\circ - 35^\circ}{2} - \cos 5^\circ = \cos 5^\circ - \cos 5^\circ = 0.$$

$$A = 0.$$

Ответ: $A = 0$.

7

Дана функция $y = -2\sin x$. Найдите её область определения, множество значений и все значения x , при которых $y = 0$.

Решение.

$$D(y) = \mathbf{R};$$

$$E(y) = [-2; 2], \text{ так как } -2 \leq -2\sin x \leq 2.$$

$$\sin x = 0 \text{ при } x = \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ: } D(y) = \mathbf{R}; E(y) = [-2; 2]; x = \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Контрольная работа № 2

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	0	$\sin 4\alpha$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{7}{25}$

Часть 2

5

Докажите тождество $\frac{2\sin^2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Решение.

$$\frac{2\sin^2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \cos 2\alpha,$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

Равенство верно при всех допустимых значениях α .

6

Сравните с нулём значение выражения $A = \cos 75^\circ + \cos 45^\circ - \cos 15^\circ$.

Решение.

$$\cos 75^\circ + \cos 45^\circ - \cos 15^\circ =$$

$$= 2\cos \frac{75^\circ + 45^\circ}{2} \cdot \cos \frac{75^\circ - 45^\circ}{2} - \cos 15^\circ =$$

$$= 2\cos 60^\circ \cos 15^\circ - \cos 15^\circ = 0.$$

Ответ: $A = 0$.

7

Дана функция $y = 1 - \cos x$. Найдите её область определения, множество значений и все значения x , при которых $y = 0$.

Решение.

$$D(y) = \mathbf{R};$$

$$E(y) = [0; 2], \text{ так как } 0 \leq 1 - \cos x \leq 2.$$

$$1 - \cos x = 0, \cos x = 1 \text{ при } x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{Ответ: } D(y) = \mathbf{R}; E(y) = [0; 2]; x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Контрольная работа № 3

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	рис. 4; 1	8	3π	$0; \frac{1}{2}$

Часть 2

5

Докажите, что функция $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$ является нечётной.

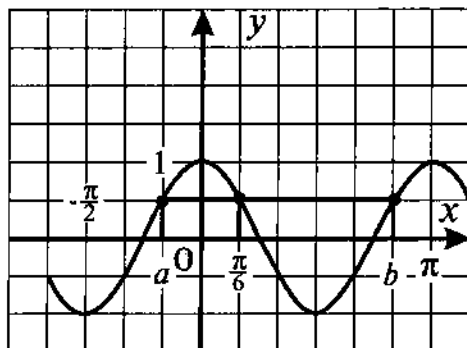
Решение.

Область определения симметрична относительно 0,
 $f(-x) = 4(-x) - \operatorname{tg}(-x) = -(4x - \operatorname{tg} x) = -f(x)$.

6

Функция $y = \cos 2x$ принимает равные значения при $x = \frac{\pi}{6}$, $x = a$, $x = b$ ($a < \frac{\pi}{6} < b$). Найдите числа a и b , если они принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.



$$\cos 2x = \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} = \cos 2a = \cos 2b.$$

$$2a = -\frac{\pi}{3}, \quad a = -\frac{\pi}{6}.$$

$$2b = -\frac{\pi}{3} + 2\pi; \quad b = \frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: $a = -\frac{\pi}{6}; \quad b = \frac{5\pi}{6}.$

7

Расположите в порядке возрастания числа:

$$\cos 0,3, \cos 1,2, \cos \pi, \cos 2,7.$$

Решение.

На промежутке $[0; \pi]$ функция $f(x) = \cos x$ убывает

и $0 < 0,3 < 1,2 < 2,7 < \pi$, тогда

$$\cos 0,3 > \cos 1,2 > \cos 2,7 > \cos \pi.$$

Ответ: $\cos \pi, \cos 2,7, \cos 1,2, \cos 0,3.$

Контрольная работа № 3

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	рис. 2; 4	-4	$\frac{\pi}{2}$	(0; 1); (1; 0)

Часть 2

5

Докажите, что функция $f(x) = x^2 + \cos x$ является чётной.

Решение.

Область определения симметрична относительно 0,

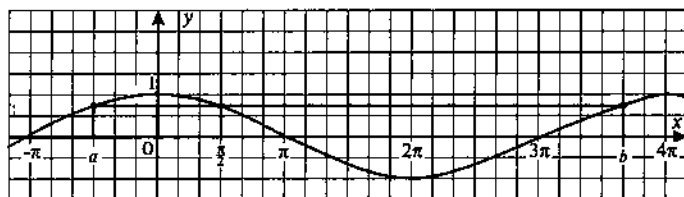
$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x).$$

6

Функция $y = \cos \frac{x}{2}$ принимает равные значения при

$x = \frac{\pi}{2}$, $x = a$, $x = b$ $\left(a < \frac{\pi}{2} < b\right)$. Найдите числа a и b ,

если они принадлежат промежутку $[-\pi; 4\pi]$.



Решение.

$$\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{a}{2} = \cos \frac{b}{2}.$$

$$\frac{a}{2} = -\frac{\pi}{4}, \quad a = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\frac{b}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi; \quad b = \frac{7\pi}{2}.$$

Ответ: $a = -\frac{\pi}{2}; \quad b = \frac{7\pi}{2}.$

7

Расположите в порядке возрастания числа:

$$\sin 0,8, \sin(-0,9), \sin \frac{3\pi}{2}, \sin 1,2.$$

Решение.

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right).$$

На промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ функция $f(x) = \sin x$ возраста-

ет и $-\frac{\pi}{2} < -0,9 < 0,8 < 1,2 < \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\sin \frac{3\pi}{2} < \sin(-0,9) < \sin 0,8 < \sin 1,2.$$

Ответ: $\sin \frac{3\pi}{2}, \sin(-0,9), \sin 0,8, \sin 1,2.$

Контрольная работа № 4

Вариант 1

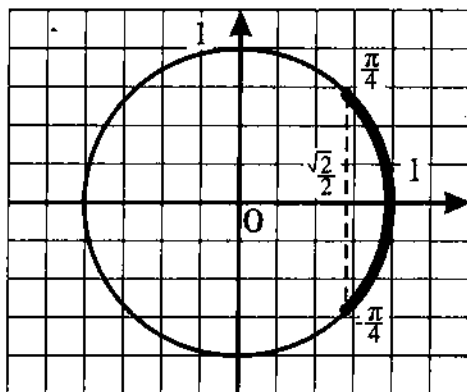
Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	0	2	$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n;$ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,$ $n \in \mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$

Часть 2

5 Решите неравенство $2\cos x - \sqrt{2} \geq 0$.

Решение.



$$2\cos x \geq \sqrt{2}; \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ при } -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

6

Решите уравнение $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x$.**Решение.**

$$3\cos^2 x - 5\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0.$$

Если $\cos x \neq 0$, тогда получаем:

$$3 - 5\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x = 0;$$

$$5\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10};$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \text{ или } \operatorname{tg} x = \frac{3}{5};$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad x = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Если $\cos x = 0$, то исходное уравнение не обращается в равенство.**Ответ:** $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

7

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y + 1 = 2\cos x, \\ y^2 = 1 + 4\cos x. \end{cases}$$
Решение.

$$\begin{cases} 2\cos x = y + 1, \\ y^2 = 1 + 2y + 2; \end{cases}$$

$$y^2 - 2y - 3 = 0;$$

$$y_1 = 3; \quad y_2 = -1;$$

$$\cos x = \frac{4}{2} > 1 \text{ или } \cos x = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ y = -1; \end{cases} \\ y = -1; & \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ y = -1. \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y = -1.$

Контрольная работа № 4

Вариант 2

Часть 1

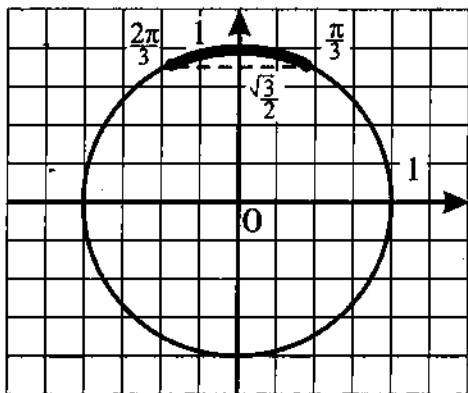
№ задания	1	2	3	4
Ответ	$\frac{\pi}{4}$	-1	$\frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$	$\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Часть 2

5

Решите неравенство $2\sin x - \sqrt{3} \geq 0$.

Решение.



$$2\sin x \geq \sqrt{3}; \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ при } \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

6

Решите уравнение $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = \sin 2x$.**Решение.**

$$2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x;$$

$$3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Если $\cos x \neq 0$, тогда получаем:

$$3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6};$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ или } \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3};$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $\cos x = 0$, то исходное уравнение не обращается в равенство.

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7

Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 3\operatorname{tg} x + 8\cos y = 7. \end{cases}$$
Решение.

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg} x + 4\cos y = 5, \\ 4\cos y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Контрольная работа № 5

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	17	- 4; - 3; 4; 5	рис. 3	$y' = \cos x - x \sin x$

Часть 2

5

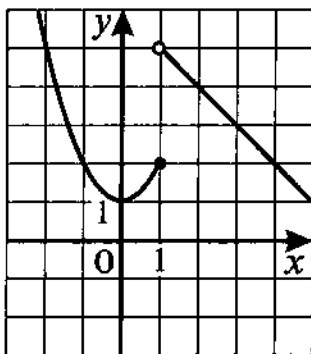
Постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \leq 1, \\ 5 - x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной в каждой точке области определения?

К какому числу стремится значение функции f при $x \rightarrow -2$? (Ответ поясните.)

Решение.



Не является непрерывной в точке $x = 1$;

при $x \rightarrow -2$ $f(x) \rightarrow 5$.

Ответ: не является непрерывной в точке $x = 1$;

при $x \rightarrow -2$ $f(x) \rightarrow 5$.

6

Докажите, что $f'(2) = g'(2)$, если $f(x) = (2x-5)^4$,
 $g(x) = 3-8x$.

Решение.

$$f(x) = (2x-5)^4, D(f) = \mathbf{R}, f'(x) = 4 \cdot 2 \cdot (2x-5)^3;$$

$$D(f') = \mathbf{R}, f'(2) = -8,$$

$$g(x) = 3-8x, D(g) = \mathbf{R}, g'(x) = -8; D(g') = \mathbf{R},$$

$$g'(2) = -8.$$

$$f'(2) = g'(2).$$

7

Найдите все значения x , при которых $f'(x) = 0$, если
 $f(x) = 2\sqrt{2} \cdot x - \sin 4x$.

Решение.

$$f(x) = 2\sqrt{2} \cdot x - \sin 4x, D(f) = \mathbf{R},$$

$$f'(x) = 2\sqrt{2} - 4\cos 4x; D(f') = \mathbf{R}.$$

$$f'(x) = 0; 4\cos 4x = 2\sqrt{2}.$$

$$\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$4x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbf{Z}.$

Контрольная работа № 5

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	4	-1; 0; 1	рис. 1	$y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

Часть 2

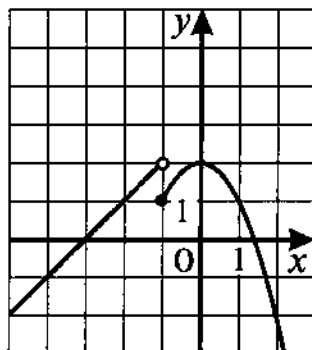
5 Постройте эскиз графика функции

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{при } x \leq -1, \\ 2-x^2 & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

Является ли она непрерывной в каждой точке области определения?

К какому числу стремится значение функции f при $x \rightarrow 1$? (Ответ поясните.)

Решение.



Не является непрерывной в точке $x = -1$;
при $x \rightarrow 1$ $f(x) \rightarrow 1$.

Ответ: не является непрерывной в точке $x = -1$;
при $x \rightarrow 1$ $f(x) \rightarrow 1$.

6

Докажите, что $g'(3) = h'(3)$, если $g(x) = (2x - 7)^5$,
 $h(x) = 10x - 7$.

Решение.

$$g(x) = (2x - 7)^5, D(g) = \mathbf{R}, g'(x) = 5 \cdot 2 \cdot (2x - 7)^4;$$

$$D(g') = \mathbf{R}, g'(3) = 10;$$

$$h(x) = 10x - 7, D(h) = \mathbf{R}, h'(x) = 10; D(h') = \mathbf{R},$$

$$h'(3) = 10.$$

$$g'(3) = h'(3).$$

7

Найдите все значения x , при которых $f'(x) = 0$, если
 $f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \cdot x$.

Решение.

$$f(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \cdot x, D(f) = \mathbf{R},$$

$$f'(x) = -2\sin 2x + \sqrt{3} = 0, D(f') = \mathbf{R},$$

$$f'(x) = 0; 2\sin 2x = \sqrt{3}.$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbf{Z}.$

Контрольная работа № 6

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	1	- 13	- 0,5	96 м/с, 104 м/с ²

Часть 2

5

Докажите, что касательные, проведённые через точки графика функции $f(x) = 1 - \cos \frac{x}{2}$ с абсциссами $x_1 = -\pi$ и $x_2 = 3\pi$, параллельны.

Решение.

$$f(x) = 1 - \cos \frac{x}{2}, D(f) = \mathbf{R}, f'(x) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}; D(f') = \mathbf{R},$$

$y = k_1 x + b_1$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_1 = -\pi$;

$y = k_2 x + b_2$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_2 = 3\pi$.

$$f'(-\pi) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}; f'(3\pi) = \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2};$$

$$k_1 = k_2.$$

$$f(-\pi) = 1 - \cos \frac{-\pi}{2} = 1; y = 1 - \frac{1}{2}(x + \pi); y = -\frac{1}{2}x + 1 - \pi;$$

$$b_1 = 1 - \pi;$$

$$f(3\pi) = 1 - \cos \frac{3\pi}{2} = 1; y = 1 - \frac{1}{2}(x - 3\pi); y = -\frac{1}{2}x + \frac{3\pi}{2} + 1;$$

$$b_2 = \frac{3\pi}{2} + 1.$$

$k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$ – прямые параллельны.

Касательные, проведённые через точки P и M графика функции $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$, параллельны биссектрисам первого и третьего координатных углов. Найдите координаты точек P и M .

Решение.

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1}, D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

$$f'(x) = \frac{(x-1) - (x-2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2},$$

$$D(f') = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty).$$

Прямая, содержащая биссектрисы первого и третьего координатных углов, задается уравнением $y = x$.

$$\frac{1}{(x-1)^2} = 1; x_1 = 0, x_2 = 2; f(0) = 2, f(2) = 0; P(0; 2),$$

$$M(2; 0).$$

Ответ: $P(0; 2), M(2; 0)$.

Найдите величину угла, образованного касательными к графику функции $y = \sin x$, которые проходят через его точки с абсциссами $x_1 = \pi$ и $x_2 = 2\pi$.

Решение.

$$y = \sin x, D(y) = \mathbf{R}; y' = \cos x, D(y') = \mathbf{R}.$$

$y = k_1 x + b_1$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_1 = \pi$;

$y = k_2 x + b_2$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_2 = 2\pi$.

$$y'(x_1) = y'(\pi) = \cos \pi = -1 = k_1;$$

$$y'(x_2) = y'(2\pi) = \cos 2\pi = 1 = k_2.$$

$k_1 \cdot k_2 = -1$: угол между прямыми – 90° .

Ответ: 90° .

Контрольная работа № 6

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	2	30	2	92 м/с, 172 м/с ²

Часть 2

5

Докажите, что касательные, проведённые через точки графика функции $f(x) = 2 + \sin 2x$ с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = \pi$, параллельны.

Решение.

$$f(x) = 2 + \sin 2x, \quad D(f) = \mathbf{R},$$

$$f'(x) = 2\cos 2x; \quad D(f') = \mathbf{R},$$

$y = k_1x + b_1$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_1 = 0$;

$y = k_2x + b_2$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_2 = 2\pi$.

$$f'(0) = 2\cos 0 = 2; \quad f'(\pi) = 2\cos 2\pi = 2; \quad k_1 = k_2.$$

$$f(0) = 2 + \sin 0 = 2; \quad y = 2 + 2(x - 0); \quad y = 2x + 2; \quad b_1 = 2;$$

$$f(\pi) = 2 + \sin 2\pi = 2; \quad y = 2 + 2(x - \pi); \quad y = 2x + 2 - 2\pi;$$

$$b_2 = 2 - 2\pi.$$

$k_1 = k_2, \quad b_1 \neq b_2$ – прямые параллельны.

6

Касательные, проведённые через точки A и B графика функции $f(x) = \frac{3+x}{x+2}$, параллельны биссектрисам второго и четвёртого координатных углов. Найдите координаты точек A и B .

Решение.

$$f(x) = \frac{3+x}{x+2}, \quad D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$$

$$f'(x) = \frac{(x+2) - (x+3)}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2},$$

$$D(f') = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty).$$

Прямая, содержащая биссектрисы второго и четвёртого координатных углов, задается уравнением $y = -x$.

$$\frac{-1}{(x+2)^2} = -1; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = -3; \quad f(-1) = 2, \quad f(-3) = 0;$$

$$A(-1; 2), \quad B(-3; 0).$$

Ответ: $A(-1; 2), \quad B(-3; 0)$.

7

Найдите величину угла, образованного касательными к графику функции $y = -\cos x$, которые проходят через

его точки с абсциссами $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$y = -\cos x, \quad D(y) = \mathbf{R}; \quad y' = \sin x, \quad D(y') = \mathbf{R}.$$

$y = k_1x + b_1$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_1 = -\frac{\pi}{2}$;

$y = k_2x + b_2$ – касательная, проведённая в точке графика функции с абсциссой $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

$$y'(x_1) = y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 = k_1;$$

$$y'(x_2) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = k_2.$$

$k_1 \cdot k_2 = -1$: угол между прямыми – 90° .

Ответ: 90° .

Контрольная работа № 7

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	-2; 4	$(-\infty; 0], [2; +\infty)$	0	2 м/с

Часть 2

5

Докажите, что уравнение $x^5 + 3x^3 - 4 = 0$ имеет единственное решение. Найдите его.

Решение.

$$f(x) = x^5 + 3x^3 - 4, \quad D(f) = \mathbb{R},$$

$$f'(x) = 5x^4 + 9x^2; \quad D(f') = \mathbb{R},$$

$f'(x) \geq 0$, следовательно, $f(x)$ возрастает на области определения.

$$f(1) = 1 + 3 - 4 = 0.$$

$x = 1$ – единственный нуль функции, соответственно, единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

6

Число 45 нужно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, причём два слагаемых были пропорциональны числам 2 и 3. Задайте формулой функцию, наибольшее значение которой необходимо будет найти.

Решение.

Пусть x — коэффициент пропорциональности, тогда одно число — $2x$; второе — $3x$, третье — $45 - 5x$.

Произведение этих трёх положительных чисел:

$$2x \cdot 3x \cdot (45 - 5x) \text{ при } 0 < x < 9.$$

$$f(x) = 2x \cdot 3x \cdot (45 - 5x), \quad f(x) = 270x^2 - 30x^3.$$

Ответ: $f(x) = 270x^2 - 30x^3$ при $0 < x < 9$.

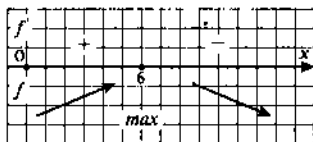
7

Найдите искомые слагаемые (см. задание 6) и представьте число 45 в виде их суммы.

Решение.

$f(x) = 270x^2 - 30x^3$ при $0 < x < 9$ (см. решение задания 6).

$$f'(x) = 30(18x - 3x^2); \quad f'(x) = 0: \quad x = 0, \quad x = 6.$$



$$45 = 12 + 18 + 15.$$

Ответ: $45 = 12 + 18 + 15$.

Контрольная работа № 7

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4
Ответ	-1; 4	$[-2; 0], [2; +\infty)$	2π	64 м/с

Часть 2

- 5** Докажите, что уравнение $3 - x^3 - 2x = 0$ имеет единственное решение. Найдите его.

Решение.

$$f(x) = 3 - x^3 - 2x, D(f) = \mathbb{R},$$

$$f'(x) = -3x^2 - 2; D(f') = \mathbb{R},$$

$f'(x) < 0$, следовательно, $f(x)$ убывает на области определения.

$$f(1) = 3 - 1 - 2 = 0.$$

$x = 1$ – единственный нуль функции, соответственно, единственный корень уравнения.

Ответ: 1.

- 6** Число 27 нужно представить в виде суммы трёх положительных слагаемых таким образом, чтобы их произведение было наибольшим, причём два слагаемых были пропорциональны числам 1 и 5. Задайте формулой функцию, наибольшее значение которой необходимо будет найти.

Решение.

Пусть x — коэффициент пропорциональности, тогда одно число — x , второе — $5x$, третье — $27 - 6x$. Произведение этих трёх положительных чисел: $x \cdot 5x \cdot (27 - 6x)$ при $0 < x < 4,5$.

$$f(x) = x \cdot 5x \cdot (27 - 6x), \quad f(x) = 135x^2 - 30x^3 \quad \text{при} \quad 0 < x < 4,5.$$

Ответ: $f(x) = 135x^2 - 30x^3$ при $0 < x < 4,5$.

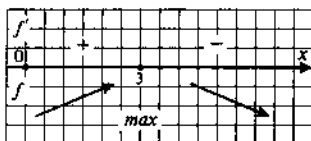
7

Найдите искомые слагаемые (см. задание 6) и представьте число 27 в виде их суммы.

Решение.

$f(x) = 135x^2 - 30x^3$ при $0 < x < 4,5$ (см. решение задания 6).

$$f'(x) = 90x(3 - x); \quad f'(x) = 0: \quad x = 0, \quad x = 3.$$



$$27 = 3 + 15 + 9.$$

Ответ: $27 = 3 + 15 + 9$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

Часть 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	221200	-3	3	-0,5	2; 5	1	2

Часть 2

8

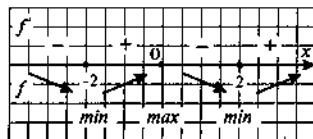
Постройте эскиз графика функции $f(x) = x^4 - 8x^2$. Используя его, определите число корней уравнения $f(x) = -2$.

Решение.

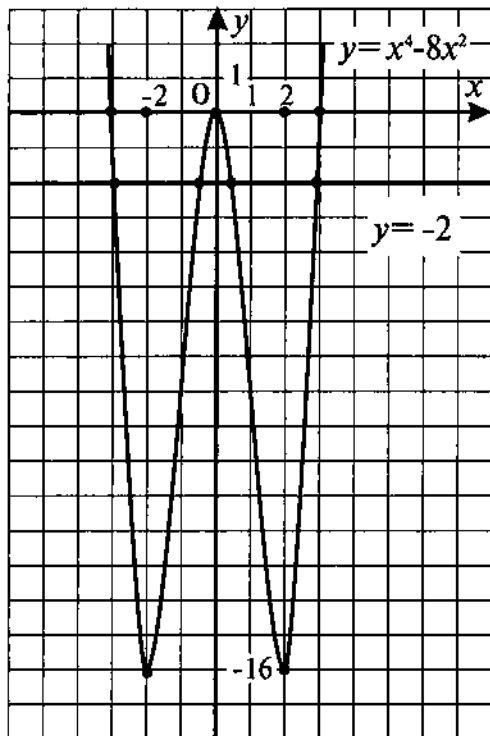
$$f(x) = x^4 - 8x^2, D(f) = \mathbf{R},$$

$$f'(x) = 4x^3 - 16x, D(f') = \mathbf{R}.$$

$$f'(x) = 0, 4x^3 - 16x = 0: x = 0; x = -2; x = 2.$$



$$f(0) = 0; f(-2) = f(2) = 16 - 32 = -16.$$



Уравнение $f(x) = -2$ имеет 4 корня.

Ответ: 4 корня.

9

Решите уравнение $\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) \sqrt{9 - x^2} = 0$.

Решение.

$$\left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) \sqrt{9 - x^2} = 0.$$

$$-\operatorname{tg}^2 x = 0; x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$-3 \leq x \leq 3: n=0 \quad x=0; n=1 \quad x=\pi > 3; n=-1$$

$$x=-\pi < -3.$$

$$9 - x^2 = 0: x = -3, x = 3.$$

Ответ: -3, 0, 3.

10

При каком значении параметра a прямая $y = 3x + a$ является касательной к графику функции $y = 4x^2 - 5x + 9$?

Решение.

$$y = 4x^2 - 5x + 9, D(y) = \mathbf{R}.$$

$$y' = 8x - 5, D(y') = \mathbf{R}.$$

$$y'(x) = k = 3; 8x_0 - 5 = 3; x_0 = 1.$$

$$y(x_0) = y(1) = 4 - 5 + 9 = 8 = y_0; y_0 = 3 + a; 3 + a = 8;$$

$$a = 5.$$

Ответ: $a = 5$.

11

Представьте число 16 в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых будет наименьшая.

Решение.

Пусть x — один из множителей, тогда другой множитель — $\frac{16}{x}$.

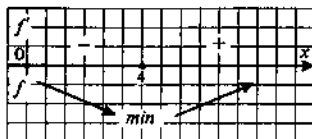
Сумма этих чисел: $x + \frac{16}{x}$ при $x > 0$.

$$f(x) = x + \frac{16}{x} \text{ при } x > 0.$$

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} \text{ при } x > 0.$$

$$f'(x) = 0: x = 4, x = -4 < 0.$$

При $x \in (0; 4)$ $f'(x) < 0$; при $x \in (4; +\infty)$ $f'(x) > 0$.



$$\min_{(0; +\infty)} f(x) = f(4).$$

$$16 = 4 \cdot 4.$$

Ответ: $16 = 4 \cdot 4.$

Итоговая контрольная работа

Вариант 2

Часть 1

№ задания	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	420	4	2,4	0,5	3; 7	1	0,6

Часть 2

8

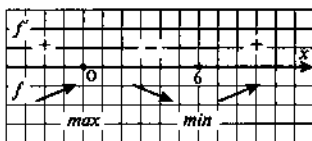
Постройте эскиз графика функции $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2$. Используя его, определите число корней уравнения $f(x) = -1$.

Решение.

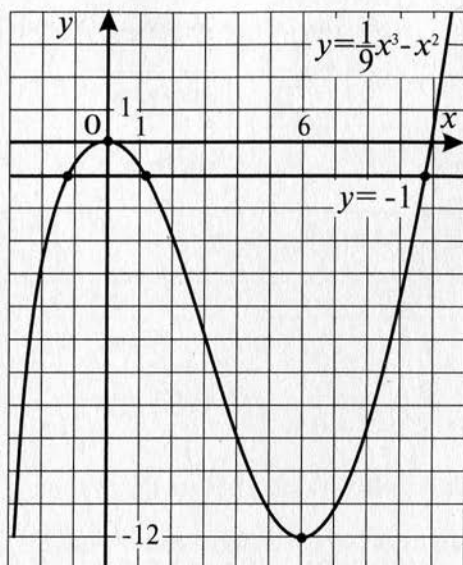
$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2, D(f) = \mathbb{R},$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x, D(f') = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0, \frac{1}{3}x^2 - 2x = 0: x = 0; x = 6.$$



$$f(0) = 1; f(6) = 24 - 36 = -12.$$



Уравнение $f(x) = -1$ имеет 3 корня.

Ответ: 3 корня.

9

Решите уравнение $\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\sqrt{4-x^2} = 0$.

Решение.

$$\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sqrt{4-x^2} = 0.$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$-2 \leq x \leq 2: \quad n=0 \quad x = \frac{\pi}{2} \approx 1,5, \quad n=1 \quad x = \frac{3\pi}{2} \approx 4,5 > 2,$$

$$n=-1 \quad x = -\frac{\pi}{2} \approx -1,5, \quad n=-2 \quad x = -\frac{3\pi}{2} \approx -4,5 < -2.$$

$$4-x^2=0: \quad x=-2, \quad x=2.$$

Ответ: $-2, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2$.

10

При каком значении параметра a прямая $y = 5x + a$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 - 3x + 7$?

Решение.

$$y = 2x^2 - 3x + 7, D(y) = \mathbf{R}.$$

$$y' = 4x - 3, D(y') = \mathbf{R}.$$

$$y'(x) = k = 5; 4x_0 - 3 = 5; x_0 = 2.$$

$$y(x_0) = y(2) = 8 - 6 + 7 = 9 = y_0; y_0 = 10 + a; 10 + a = 9;$$

$$a = -1.$$

Ответ: $a = -1$.

11

Площадь прямоугольника равно 36. Какие длины должны иметь его стороны, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

Решение.

Пусть x — длина одной стороны прямоугольника, тогда длина другой стороны — $\frac{36}{x}$.

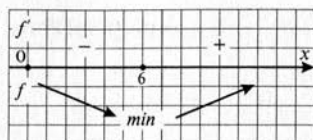
Периметр прямоугольника: $2\left(x + \frac{36}{x}\right)$ при $x > 0$.

$$P(x) = 2\left(x + \frac{36}{x}\right) \text{ при } x > 0.$$

$$P'(x) = 2\left(1 - \frac{36}{x^2}\right) \text{ при } x > 0.$$

$$P'(x) = 0: x = 6, x = -6 < 0.$$

При $x \in (0; 6)$ $P'(x) < 0$; при $x \in (6; +\infty)$ $P'(x) > 0$.



$$\min_{(0; +\infty)} P(x) = P(6).$$

Стороны прямоугольника: 6; 6.

Ответ: 6; 6.

ИНТЕЛЛЕКТ-ЦЕНТР

Учебные материалы для
подготовки к ЕГЭ и ГИА

Тетради для тематического
и итогового контроля

Сборники тестовых заданий

Дидактические материалы

Материалы для развития
интеллектуальных
способностей

Учебные пособия,
реализующие современные
технологии в обучении и
контроле учащихся

ISBN 978-5-89790-834-9



9 785897 908349 >

По вопросам оптовых закупок и заключения договоров
обращайтесь по тел./факсу: (495) 330-43-47, 330-08-83

Ждем Ваших писем: Москва, 117485, а/я 18

E-mail: incent@com2com.ru

<http://www.intellectcentre.ru>